

# Функциональная

# математическая грамотность:

Основные подходы к оценке математической грамотности, используемые в исследовании PISA.

Особенности инструментария для оценки математической грамотности.

Проблемы формирования математической грамотности учащихся в основной школе



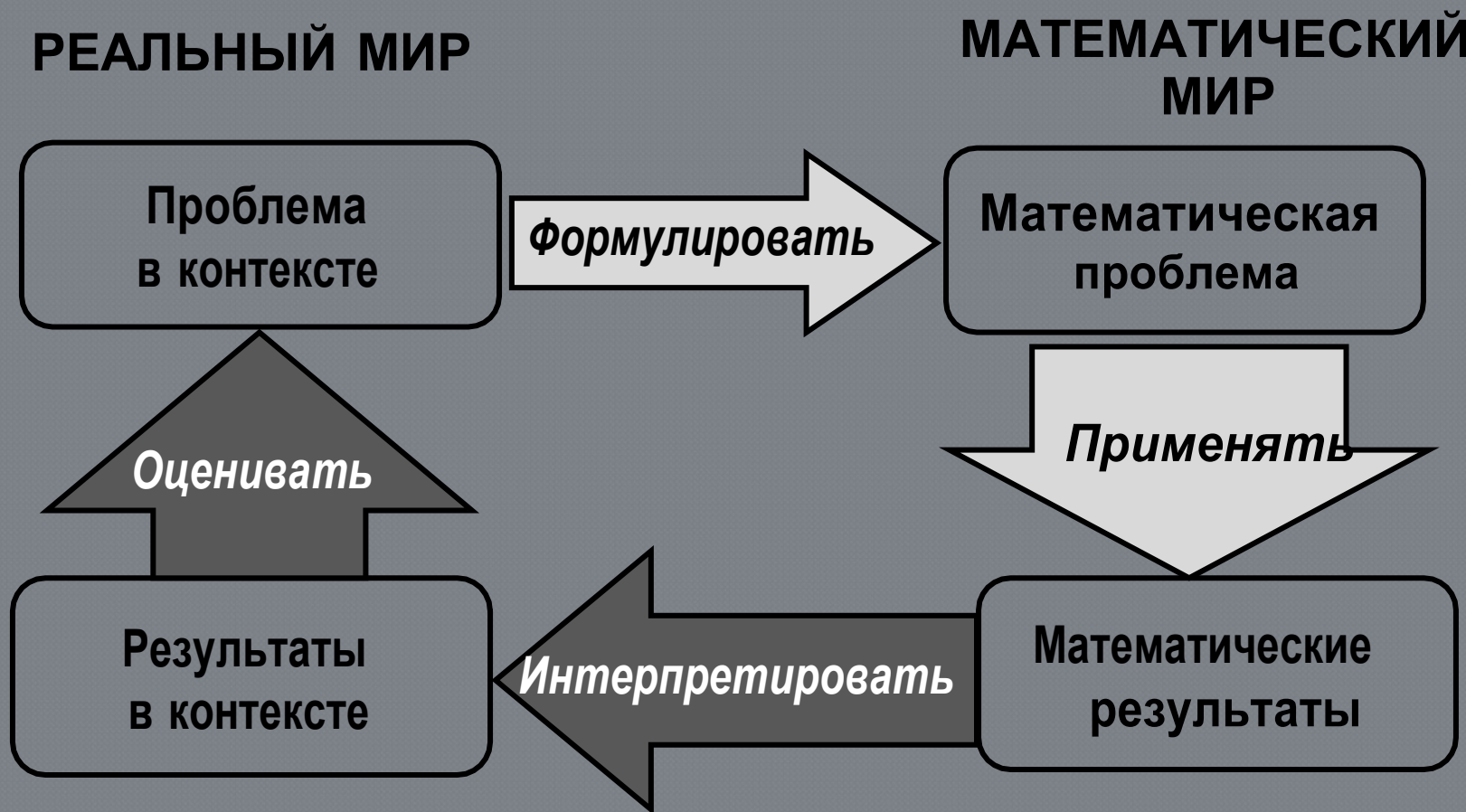
# Определение. PISA

---

- «Математическая грамотность – это способность индивидуума формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных контекстах. Она включает математические рассуждения, использование математических понятий, процедур, фактов и инструментов для описания, объяснения и предсказания явлений. Она помогает людям понять роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, которые должны принимать конструктивные, активные и размышляющие граждане»



# Модель математической грамотности. PISA





# Организации области исследования

---

- математическое *содержание*, которое используется в заданиях
- *контекст*, в котором представлена проблема
- мыслительные *процессы*, которые описывают, что делает ученик, чтобы связать этот контекст с математикой, необходимой для решения поставленной проблемы



# Контексты. PISA-2012

---

*Контекстные категории реального мира:*

- Личностные,
- Общественные,
- Профессиональные,
- Научные



# Мыслительные процессы. PISA-2012

---

- формулировать ситуацию математически
- применять математические понятия, факты, процедуры размышления
- интерпретировать, использовать и оценивать математические результаты



# Области содержания. PISA-2012

---

- Изменения и зависимости (алгебра)
- Пространство и форма (геометрия)
- Неопределенность и данные (ТВ и статистика)
- Количество (арифметика)



# «Пицца». PISA-2012

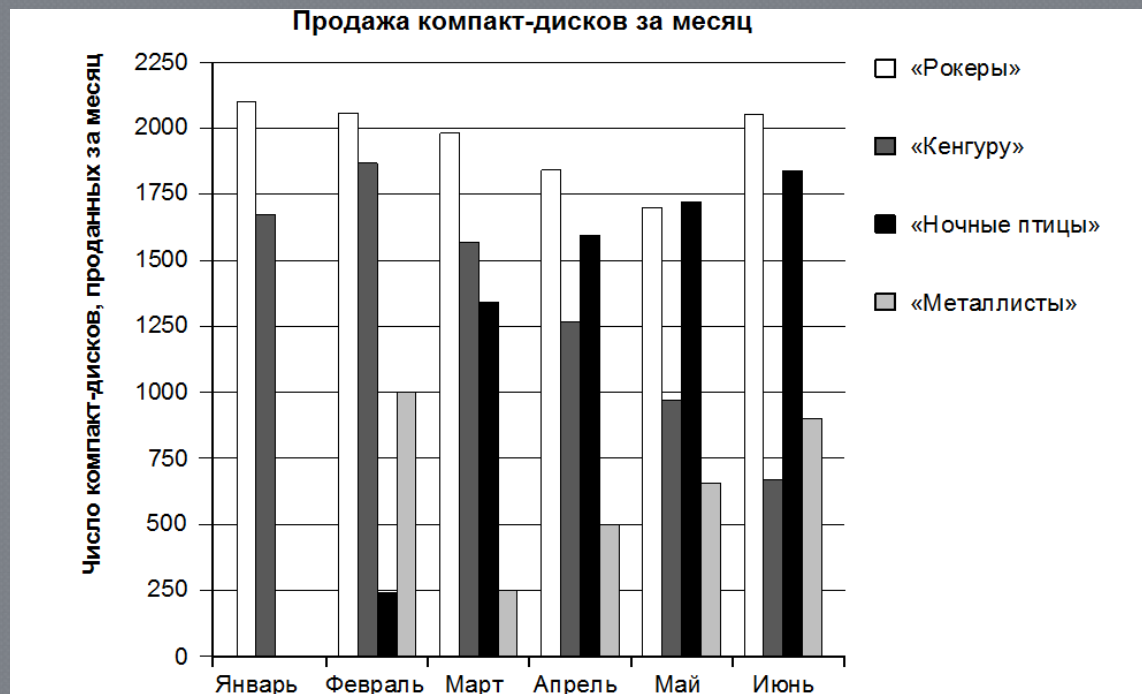
---

- «В пиццерии продаются два вида круглой пиццы, имеющих одинаковую толщину и разные размеры. Диаметр меньшей пиццы равен 30 см, и она стоит 30 зедов. Диаметр большей пиццы равен 40 см, и она стоит 40 зедов. Какие пиццы выгоднее продавать хозяину пиццерии? Приведите ваши рассуждения.»
- *Результат: 11%. Личный. Формулировать. Изменение и зависимости*



# «Продажа музыкальных дисков».

## PISA-2012



### Вопрос 1: ПРОДАЖА МУЗЫКАЛЬНЫХ ДИСКОВ

Сколько компакт-дисков музыкальная группа «Металлисты» продала в апреле?

- A 250
- B 500
- C 1000
- D 1270

### Вопрос 2: ПРОДАЖА МУЗЫКАЛЬНЫХ ДИСКОВ

В каком месяце музыкальная группа «Ночные птицы» в первый раз продала больше своих компакт-дисков, чем музыкальная группа «Кенгуру»?

- A Не было такого месяца
- B Март
- C Апрель
- D Май



# «Продажа музыкальных дисков».

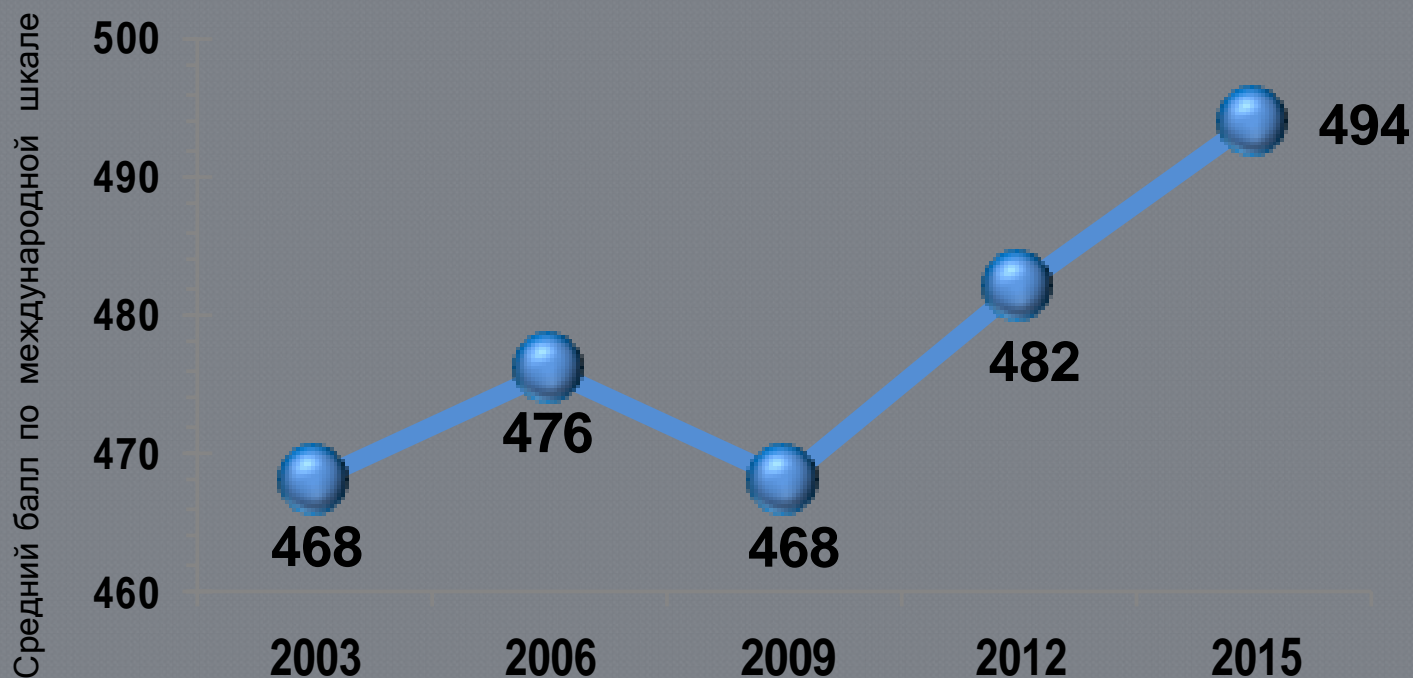
PISA-2012

- Содержание: Неопределенность и данные
- Вид деятельности: «Интерпретировать» (дать ответ с учетом условий представленной в задании ситуации)
- Контекст: Общественный
- Уровень сложности:
  - 1) ниже 1 уровня сложности, 2) 1 уровень
- Результат РФ:
  - 1) 89%; 2) 72%
- Средний результат стран ОЭСР:
  - 1) 87%; 2) 80%
- Максимальный результат:
  - 1) 93%; 2) 91%



# Динамика результатов. PISA-2012

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГРАМОТНОСТЬ





# Динамика по уровням. PISA-2012

## УРОВНИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ





# Результаты по видам деятельности. PISA-2012 и 2015

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГРАМОТНОСТЬ



Среднее значение стран ОЭСР по тесту – 494 балла

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГРАМОТНОСТЬ





# ФГОС 000

---

- Из п. 6: ... умеющий учиться, ..., способный применять полученные знания на практике;...
- Из п. 8: ... метапредметные результаты, включающие освоенные обучающимися межпредметные понятия и универсальные учебные действия, способность их использования в ... социальной практике...



# ФГОС 000. Из предметных результатов обучения

---

- 9) развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах;



# «Столешница»

---

- 1) Принять задачу и сформулировать цель деятельности
- 2) переформулировать практическую ситуацию в математическую задачу
- 3) составить план действий
- 4) как измерять?
- 5) в каких единицах измерять?



# Результаты по областям содержания. PISA-2012 и 2015

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГРАМОТНОСТЬ



Среднее значение стран ОЭСР по тесту – 494 балла

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГРАМОТНОСТЬ





# Предметная компонента

---

- ПООП – раздел «ученик научится»?
- Уровень базовой математической подготовки?
- Только практические навыки?



# Без теории нет практики

---

Связь между уровнем сформированности предметного знания и его переносом в новую ситуацию:

чем выше уровень владения предметным знанием, тем выше вероятность его успешного применения в новом контексте.







# Национальное исследование качества образования (5-7 кл.). 2015

---

- Анализ результатов проведенного обследования по блокам содержания позволяет говорить о недостаточной сформированности у учащихся **базовых предметных навыков**, составляющих основу качественной математической подготовки.



# НИКО. Блок «Числа и вычисления»

---

- Умение выполнять основные арифметические действия показывают примерно две трети учащихся 5-7-х классов.



## НИКО. Блок «Геометрия»

---

- Показали владение единицами измерения длины 70-80% учащихся: они установили соответствие между объектами и их размерами;
- только треть 7-классников справились с двух-шаговой задачей, где требовалось:
  - 1) найти площадь прямоугольника, изображенного на клетке со стороной 1 см;
  - 2) вычислить сторону прямоугольника по заданной стороне и найденной площади.



# Деятельностная компонента

---

- коммуникативная
- информационная
- читательская
- социальная



# Метапредметные навыки. НИКО

---

- делать логические выводы из приведенных утверждений;
- конструировать объекты с учетом заданных параметров;
- анализировать данные, представленные в виде таблиц, схем;
- приводить собственные примеры;
- контролировать результат своих действий на предмет соответствия полученному заданию;
- применять полученные знания для решения практических задач.



# Метапредметные навыки. НИКО

---

- Только около половины учащихся могут сделать несложные *умозаключения* в ситуациях из обыденной жизни. Доля за 2 года обучения остается неизменной.
- Три четверти 5-классников продемонстрировали умение *извлекать информацию* из таблицы.



# Метапредметные навыки. НИКО

---

- *Геометрическое конструирование*: наличие продемонстрировали 29% 5-классников, 42% 6-классников и 34% 7-классников. Снижение за счет учащихся, имеющих хорошую и отличную подготовку.
- *Умение применять знания в практической ситуации* (подсчитать стоимость билетов или покупки) – справились около 60% учащихся.



# Пример «Проценты»

---

- Предметные результаты: уметь находить 20% от числа 25 и уметь находить число, 20% от которого равно 25.
- читательская грамотность: прочесть задачу и понять, что требуется найти;
- информационная грамотность: распознать неверную круговую диаграмму, на которой сумма всех частей не равна 100%;
- социальная грамотность: понять контекст
- коммуникативная грамотность: сформулировать полученный результат в речевой форме, в терминах и понятиях соответствующей сюжету социальной сферы.



# Процессуальная компонента

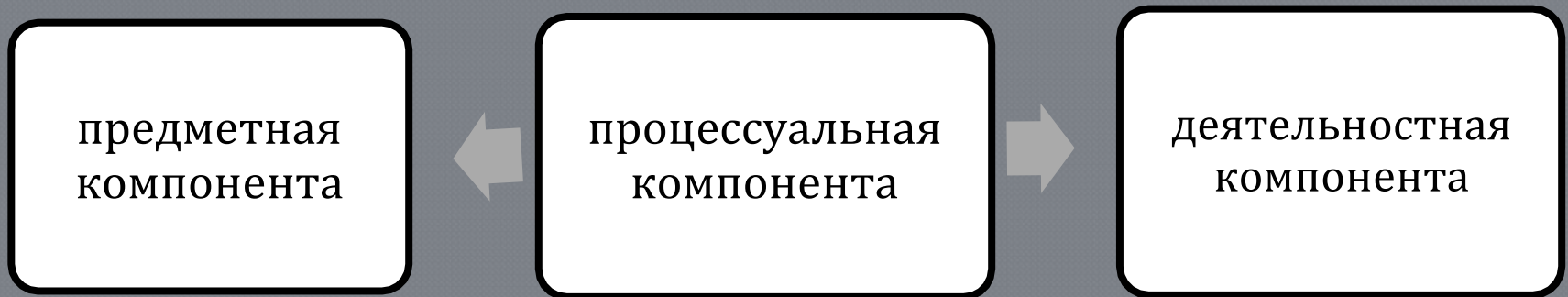
---

- Готовность к взаимодействию с математической стороной окружающего мира;
- опыт поиска путей решения жизненных задач, моделирования ситуаций;
- способность планировать, конструировать алгоритмы, контролировать процесс, прогнозировать результат;
- рефлексивные качества, обеспечивающие контроль, проверку и оценку результата.



# Структура функциональной грамотности

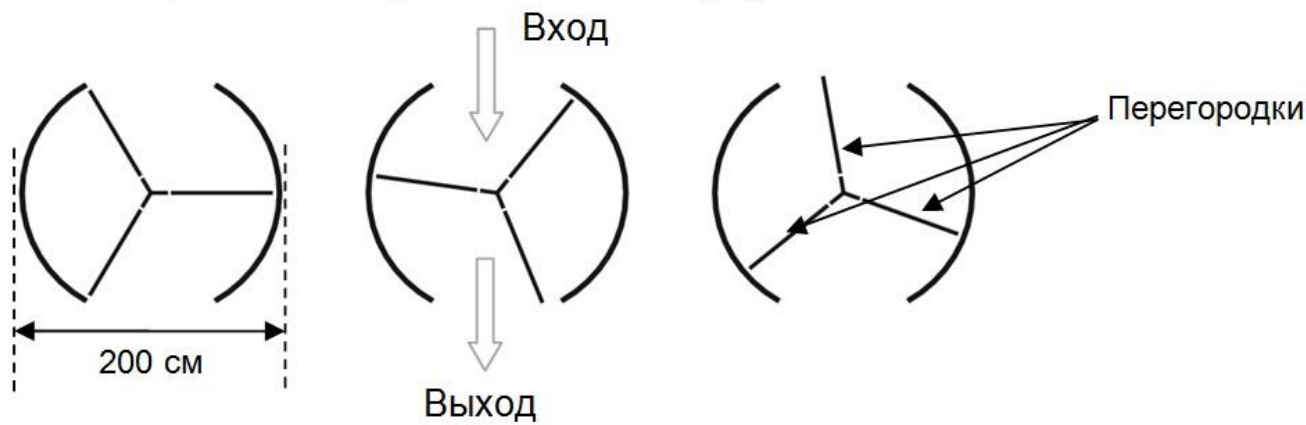
---





# «Вращающаяся дверь». PISA

**Пример «Вращающаяся дверь».** Вращающаяся дверь имеет три стеклянных перегородки, которые вместе с этой дверью вращаются внутри кругового пространства. Внутренний диаметр этого пространства 2 метра (200 сантиметров). Три дверные перегородки делят пространство на три равных сектора. Ниже на плане показаны дверные перегородки в трёх разных позициях, если смотреть на них сверху.



Вопрос 1. Чему равна в градусах величина угла между двумя дверными перегородками? Ответ: 120 °.



# «Вращающаяся дверь». PISA

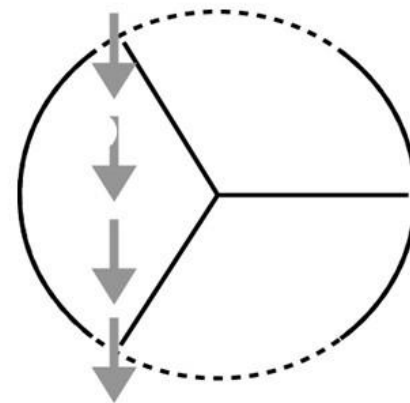
Вопрос 2. Два дверных проёма (пунктирные дуги на рисунке) имеют одинаковый размер. Если эти проёмы слишком широкие, то вращающиеся двери не смогут закрыть открытое пространство, и воздух сможет свободно поступать через вход и выход.

Это приведет либо к потере тепла, либо к его увеличению. Этот случай показан на рисунке справа.

Какую наибольшую длину дуги в сантиметрах (см) может иметь каждый дверной проём, чтобы воздух никогда не мог свободно поступать через вход и выход?

Ответ: в пределах от 103 до 105 (значение зависит от точности значения  $\pi$ , использованного в вычислениях), принимаются ответы  $(\frac{100\pi}{3})$ , вычисленные как  $1/6$  длины окружности.

В этой позиции возможно поступление воздуха.





# «Вращающаяся дверь». PISA

---

- Содержание: Пространство и форма
- Вид деятельности: «Формулировать»  
(создать модель решения)
- Уровень сложности: 6 уровень
- Результат РФ: 3%
- Средний результат стран ОЭСР: 4%
- Максимальный результат: 14%



# «Парусные корабли». PISA-2012

**Пример 3. Парусные корабли.** Девяносто пять процентов товаров в мире перевозят по морю примерно 50 000 танкеров, грузовых кораблей и контейнеровозов. Большинство этих кораблей используют дизельное топливо.

Инженеры планируют разработать поддержку кораблей, используя силу ветра. Их предложение заключается в прикреплении к кораблям кайтов (парящих в воздухе парусов) и использовании силы ветра, чтобы уменьшить расход дизельного топлива и его влияние на окружающую среду.

Из-за высокой стоимости дизельного топлива в 0,42 зедра за литр хозяева корабля «Новая волна» думают о том, чтобы снабдить свой корабль кайтом.

Подсчитано, что подобный кайт даёт возможность уменьшить расход дизельного топлива на 20%.

Рис © by skysails



Название: «Новая волна».

Тип: фрахтовое судно (сдаётся в наём).

Длина: 117 метров.

Ширина: 18 метров.

Грузоподъёмность: 12 000 тонн.

Максимальная скорость: 19 узлов.

Расход дизельного топлива за год без использования кайта: примерно 3 500 000 литров.



Стоимость установки на «Новой волне» кайта составляет 2 500 000 зедов.

Через сколько примерно лет экономия на дизельном топливе покроет стоимость установки кайта? Приведите вычисления, подтверждающие ваш ответ.



$$1) 3500000 \cdot 0,2 = 700000 \text{ (л)}$$

$$2) 700000 \cdot 0,42 = 294000 \text{ (з.)}$$

$$3) 2500000 : 294000 \approx 8,5 \text{ (л.)}$$

**Пример 3.** Парусные корабли. Девяносто пять процентов товаров в мире перевозят по морю примерно 50 000 танкеров, грузовых кораблей и контейнеровозов. Большинство этих кораблей используют дизельное топливо.

Инженеры планируют разработать поддержку кораблей, используя силу ветра. Их предложение заключается в прикреплении к кораблям кайтов (парящих в воздухе парусов) и использовании силы ветра, чтобы уменьшить расход дизельного топлива и его влияние на окружающую среду.



Из-за высокой стоимости дизельного топлива **0,42 зедра** за литр топлива корабль «Новая волна» задумал о том, чтобы снабдить свой корабль кайтом.

Подсчитано, что подобный кайт даёт возможность уменьшить расход дизельного топлива на **20%**.

Название: «Новая волна».

Тип: фрахтовое судно (сдаётся в наём).

Длина: 117 метров.

Ширина: 18 метров.

Грузоподъёмность: 12 000 тонн.

Максимальная скорость: 19 узлов.

Расход дизельного топлива за год без использования кайта: примерно **3 500 000 литров.**



Стоимость установки на «Новой волне» кайта составляет **2 500 000 зедра.**

Через сколько примерно лет экономия на дизельном топливе покроет стоимость установки кайта? Приведите вычисления, подтверждающие ваш ответ.



# «Парусные корабли». PISA-2012

---

- Содержание: Количество
- Вид деятельности: Формулировать
- Контекст: Научный
- Результат РФ: 16%
- Средний результат стран ОЭСР: 15%
- Максимальный результат: 47%



# Мнение экспертов

---

- Задача была бы посильной для российских учащихся, если бы была сформулирована в редакции:

За год двигатель на корабле потребляет 3 500 000 л топлива, 1 литр топлива стоит 0,42 р. Установка паруса на корабле стоит 2 500 000 р. Парус экономит 20% топлива. Через сколько лет экономия топлива покроет стоимость установки паруса?



# Две текстовые задачи

---

- «Сергей поймал 20 рыб и сложил их в ведро. Пока он складывал удочки, десятую часть всех рыб утащила кошка. На сколько уменьшилось число рыб в ведре?»
- «В песочницу квадратной формы с длиной боковой стены, равной 2 м, требуется насыпать песок – по 10 кг на один квадратный метр. Сколько килограммов песка нужно для 10 таких песочниц?»



# Эффект «типичной задачи»

---

- Решая типичную текстовую задачу, ученик подменяет этап понимания и составления модели категоризацией и поиском в памяти готового алгоритма для данной категории задач, моделирование подменяется поиском готовой модели.
- При решении нетипичной задачи этапы понимания развернуты, самостоятельны, этап интерпретации логичен и осмыслен.



# Пример. Велосипедные колеса

---

Размер велосипедного колеса (по внешнему диаметру покрышки) традиционно указывается в дюймах: 16", ..., 26", 27,5", 28", 29", 36".

На фото:  
колесо диаметром 26"  
(слева) и 29" (справа).





# Типичная задача

---

- Размер колеса шоссейного велосипеда равен 27 дюймам. Чему равен размер обода такого колеса в сантиметрах, если 1 дюйм равен примерно 2,54 см?
- Планируемый результат:  
вычислять длину окружности в заданных единицах измерения, выполняя перевод одних единиц в другие, исходя из имеющейся справочной информации, округлять.



Задание 1. Чему равен размер обода шоссейного велосипеда в сантиметрах, если 1 дюйм равен примерно 2,54 см?

Размер колеса (в дюймах)	Размер обода (в см)	Виды велосипедов
20	159,5	Детские, складные
24	191,4	Трюковые, подростковые
26	207,4	Горные, прогулочные
27	?	Шоссейные
27,5	219,3	Горные
28	223,3	Гибридные, дорожные



# Задание для формирования ФГ

---

- 1) Реальная задача с лишними данными;
- 2) два явных пути решения: по формуле и через пропорцию, значит, полезно обсудить и сравнить эти два способа с точки зрения рационализации;
- 3) можно поговорить о способах проверки, об оценке: между какими числами ответ, к какому ближе;
- 4) можно предложить неверные пути: найти среднее арифметическое соседних значений.



**Задание 2. Велосипедная рама — основная часть велосипеда, к которой крепятся прочие компоненты. Размер рамы зависит от роста человека, люди маленького роста нуждаются в меньших рамах. На сайте дана следующая информация:**

«Для наиболее популярных моделей велосипедов приведем размеры рамы (в см) и ее соотношение с ростом велосипедиста:

- Рост 190 см (и более): шоссейные – 57-59, дорожные – 56-58, горные – 48-50,
- Рост 180 см: шоссейные – 53-55, дорожные – 50-52 и горные – 44-46,
- Рост 170 см: шоссейные – 50-52, дорожные – 46-48, горные – 41-44.»

Представьте данную информацию в табличном виде.



Задание 3. В таблице представлены размеры колес для детских велосипедов. Чтобы подобрать ребенку велосипед, можно руководствоваться таблицей. Подберите размер колеса для ребенка шести с половиной лет ростом 118 см.

Размер колеса (в дюймах)	Рост ребенка (в см)	Возраст, лет
12	до 98	2-3
12, 14	От 98 до 104	3-4
14, 16	От 104 до 110	4-5
16, 18	От 110 до 116	5-6
18, 20	От 116 до 128	7-8
20, 24	От 128 до 164	от 8



## Задание 4. Проектная работа

---

- Выберите какой-нибудь тип велосипеда и подберите для себя подходящий (укажите размер рамы и размер колеса), соответствующий вашим параметрам.



# Направления движения:

---

- погружение учащихся в реальные ситуации
- осознание моделирования как стратегии, которой надо обучать
- формирование метапредметных результатов обучения
- решение задач разными способами и максимальная независимость учащихся в решении задач



# Материалы журнала «Математика»

---

- №2. 2018 – тема: финансовая математика
- №12. 2017 – краеведение, подготовка к ЕГЭ



